

直线：$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$

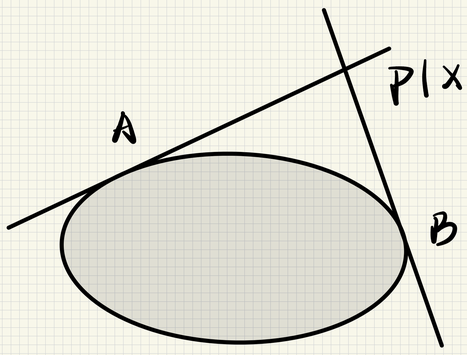
$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ kx-y+k_0-kx_0=0\end{cases}$$

$$\Delta = 4a^2b^2\left(a^2k^2+b^2-(y_0-kx_0)^2\right)=0$$

解得 $k=-\frac{x_0b^2}{a^2y_0}$

$$y-y_0=-\frac{x_0b^2}{a^2y_0}(x-x_0)$$

$$\Rightarrow \frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$$



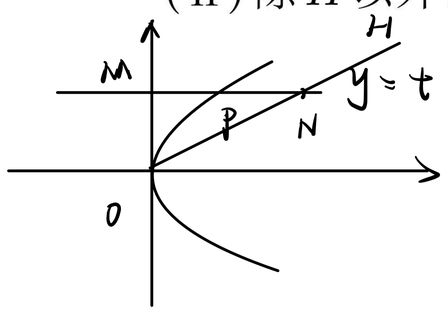
切点弦：$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$

第13讲：圆锥曲线解答题之相切问题

1. (2016·新课标Ⅰ文) 在直角坐标系 xOy 中，直线 l：$y=t(t\neq 0)$ 交 y 轴于点 M，交抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$ 于点 P，M 关于点 P 的对称点为 N，连结 ON 并延长交 C 于点 H.

(Ⅰ) 求 $\dfrac{|OH|}{|ON|}$；

(Ⅱ) 除 H 以外，直线 MH 与 C 是否有其它公共点？说明理由.



(Ⅰ) $t^2=2px \Rightarrow x=\dfrac{t^2}{2p}$

$P\left(\dfrac{t^2}{2p},t\right)$

$N\left(\dfrac{t^2}{p},t\right)$

$k=\dfrac{t}{\frac{t^2}{2p}}=\dfrac{p}{t}$ $t'=\dfrac{t}{p}$

$\begin{cases} y^2=2px \\ x=t'y \end{cases}$ $y^2=2pt'y \Rightarrow y=2pt'$

$\dfrac{|OH|}{|ON|}=\dfrac{2pt'}{t}=\dfrac{2p\times\frac{t}{p}}{t}=2.$

(Ⅱ) $H\left(\dfrac{2t^2}{p},2t\right)$

$k_{MH}=\dfrac{2t-t}{\frac{2t^2}{p}}=\dfrac{p}{2t}$

直线 MH：$y=\dfrac{p}{2t}x+t$

$y^2=2px=2p\left(\dfrac{(y-t)2t}{p}\right)$

$y^2-4ty+4t^2=0.$

$\Delta=16t^2-16t^2=0.$

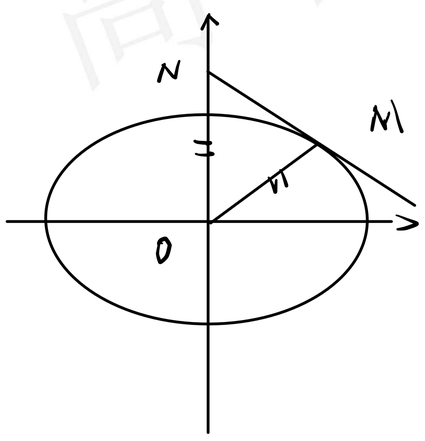
∴ 相切，无其他公共点.

2. (2022·天津) 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 F、右顶点为 A，上顶点为 B，且满足 $\dfrac{|BF|}{|AB|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆的离心率 e；

(2) 直线 l 与椭圆有唯一公共点 M，与 y 轴相交于 $N(N$ 异于 $M)$. 记 O 为坐标原点，若 $|OM|=|ON|$，且 $\triangle OMN$ 的面积为 $\sqrt{3}$，求椭圆的标准方程.

$\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{1}{3}$ $e=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.



设直线 MN：$y=kx+m$.

$\begin{cases} \dfrac{x^2}{3b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ kx-y+m=0 \end{cases}$

$\Delta=4\cdot 3b^2\cdot b^2\left(3b^2k^2+b^2-m^2\right)=0.$

$\Rightarrow b^2(3k^2+1)=m^2$

$x_M=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{-6b^2km}{3b^2k^2+b^2}=\dfrac{-3b^2k}{m}$

$x_M=\dfrac{1}{2}(x_1+x_2)$ $y_M=kx+m=\dfrac{-3b^2k^2+m^2}{m}=\dfrac{-b^2k^2+3b^2k^2+b^2}{m}=\dfrac{b^2}{m}$

$|OM|=|ON|$ $\Rightarrow \dfrac{9b^4k^2+b^4}{m^2}=m^2$

$9k^4k^2+6k^2+1=9k^2+1$

$k^2=\dfrac{1}{3}$

$S_\Delta=\dfrac{1}{2}|m|\dfrac{3b^2|k|}{|m|}=\dfrac{3}{2}b^2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $b^2=2.$

$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$

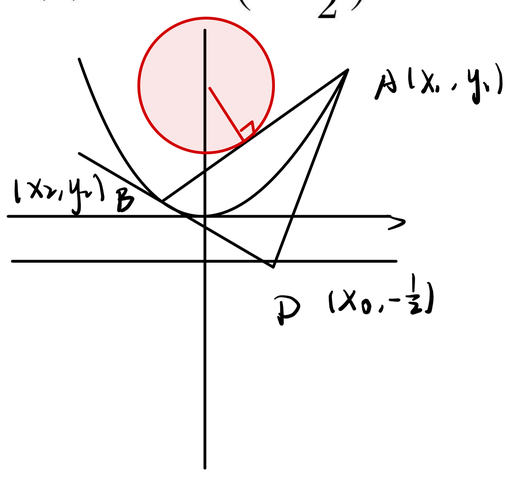
高中数学资料微信：NS12026

3. (2019·新课标III) 已知曲线 $C: y=\frac{x^2}{2}$，D 为直线 $y=-\frac{1}{2}$ 上的动点，过 D 作 C 的两条切线，切点分别为 A, B.

(1) 证明：直线 AB 过定点.

(2) 若以 $E\left(0, \frac{5}{2}\right)$ 为圆心的圆与直线 AB 相切，且切点为线段 AB 的中点，求该圆的方程.

(1)



(1) 设切线 AD: $y-y_1=k(x-x_1)$

$x^2=2y=2(kx+y_1-kx_1)$

$x^2-2kx-2y_1+2kx_1=0$.

$\Delta=4k^2-4(2kx_1-2y_1)=0$.

$\Rightarrow k^2-2kx_1+x_1^2=0$.

$\therefore k=x_1$

$y-y_1=x_1x-xy_1$

$y=x_1x-y_1$

不是任线也成立

同理，切线 $BD: y=x_2x-y_2$

同构

$\begin{cases} x_1x_0-y_1=-\frac{1}{2} \\ x_2x_0-y_2=-\frac{1}{2} \end{cases}$ $\Rightarrow$ 直线 $AB: x_0x-y=-\frac{1}{2}$

(x_1, y_1)、(x_2, y_2) 均满足

$y=x_0x+\frac{1}{2}$ 过定点 $(0, \frac{1}{2})$

求导

(2) $x^2=2y=2\left(x_0x+\frac{1}{2}\right)$

$x^2-2x_0x-1=0$.

横坐标呈等差数列.

$x_1+x_2=2x_0$ $\quad x_1x_2=-1$

$y_1+y_2=x_0(x_1+x_2)+1=2x_0^2+1$

AB 中点 $(x_0, x_0^2+\frac{1}{2})$

① 当 $x_0=0$. $r=2$. $\quad x^2+(y-\frac{5}{2})^2=4$.

② 当 $x_0\neq 0$.

$\frac{x_0^2+\frac{1}{2}-\frac{5}{2}}{x_0-0}\times x_0=-1$

$x_0^2=1$

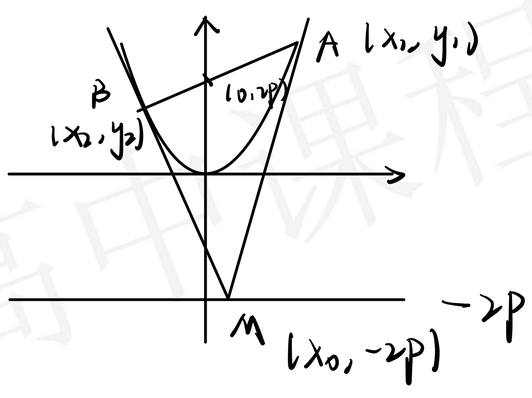
$R^2=(x_0-0)^2+(x_0^2+\frac{1}{2}-\frac{5}{2})^2=2$.

$x^2+(y-\frac{5}{2})^2=2$.

4. 设抛物线方程为 $x^2=2py(p>0)$，M 为直线 $y=-2p$ 上任意一点，过 M 引抛物线的切线，切点分别为 A, B.

(Ⅰ) 求证：A, M, B 三点的横坐标成等差数列；

(Ⅱ) 已知当 M 点的坐标为 $(2, -2p)$ 时，$|AB|=4\sqrt{10}$. 求此时抛物线的方程；



(1) $x_1+x_2=2x_0$

$y=x_1x-y_1$.

$\begin{cases} x_1x_0=p(y_1-2p) \\ x_2x_0=p(y_2-2p) \end{cases}$

$AB: x_0x=p(y-2p)$

$k=\frac{x_0}{p}$

$x^2=2py=2(x_0x+2p^2)$

$x^2-2x_0x-4p^2=0$

$\therefore x_1+x_2=2x_0$

(2) 当 $x_0=2$ 时 $\quad$ AB 过焦点

$k=\frac{x_0}{p}=\frac{2}{p}$

$x_1+x_2=4$

$x_1\cdot x_2=-4p^2$

$|AB|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=\sqrt{(1+\frac{4}{p^2})[16+16p^2]}=4\sqrt{10}$

$(1+\frac{4}{p^2})(1+p^2)=10$. $\quad p^2+\frac{4}{p^2}=5$

$p^2=1$ 或 $p^2=4$.

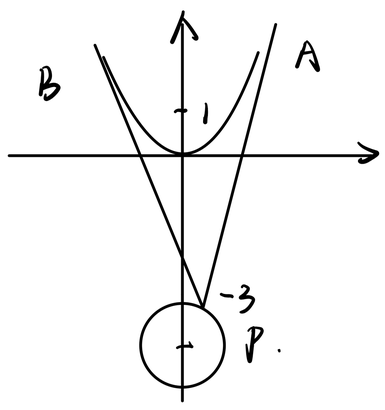
$p=1$ / $p=2$

高中课程资料微信：NSJ2026

5. (2021·乙卷) 已知抛物线 $C: x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 F，且 F 与圆 $M: x^2+(y+4)^2=1$ 上点的距离的最小值为 4.

(1) 求 p；

(2) 若点 P 在 M 上，PA，PB 为 C 的两条切线，A，B 是切点，求 $\triangle PAB$ 面积的最大值.



$F(0,1)$. $\Rightarrow p=2$.

$(0,-4)$

$x^2=4y$.

切点弦 AB：$x_0x=2(y+y_0)$

$$\begin{cases} x_1x_2=2(y_0+y_1) \\ x_2x_0=2(y_0+y_2) \end{cases}$$

直线 $x_0x=2(y+y_0)$

$x^2=4y=2(x_0x-2y_0)$

$x^2-2x_0x+4y_0=0$.

$\therefore x_1+x_2=2x_0$. $x_1x_2=4y_0$.

$|AB|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$

$=\sqrt{(1+\frac{x_0^2}{4})[4x_0^2-16y_0]}$

$AB: x_0x-2y-2y_0=0$.

$d_{P-AB}=\dfrac{|x_0^2-2y_0-2y_0|}{\sqrt{x_0^2+4}}$

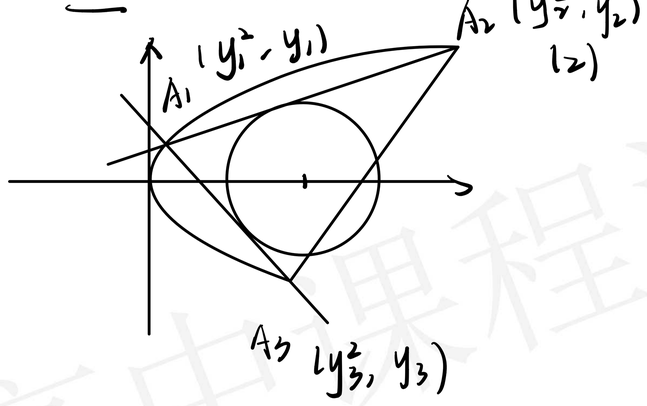
$S=\frac{1}{2}|AB|\cdot d_{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{x_0^4-4y_0}\cdot|x_0^2-4y_0|$

$=\frac{1}{2}\sqrt{(x_0^2-4y_0)^3}$

6. (2021 全国Ⅱ) 抛物线 C 的顶点为坐标原点 O，焦点在 x 轴上，直线 $l: x=1$ 交 C 于 P，Q 两点，且 $OP\perp OQ$，已知点 $M(2,0)$，且 $\odot M$ 与 l 相切.

(1) 求 C，$\odot M$ 的方程；

(2) 设 A_1，A_2，A_3 是 C 上的三个点，直线 A_1A_2，A_1A_3 均与 $\odot M$ 相切，判断直线 A_2A_3 与 $\odot M$ 的位置关系，并说明理由.



$y^2=2px$. $(1,1)$. $\therefore y^2=x$ $p=\frac{1}{2}$.

$(x-2)^2+y^2=1$

$A_2(y_2^2,y_2)$

A_2A_3：$\dfrac{y-y_2}{y_3-y_2}=\dfrac{x-y_2^2}{y_3^2-y_2^2}$

相切

两点式

$(y_1-y_2)x+(x_2-x_1)y=x_2y_1-x_1y_2$

A_1A_2：$\dfrac{y-y_2}{y_1-y_2}=\dfrac{x-y_2^2}{y_1^2-y_2^2}$

$(y_1-y_2)x+(y_2^2-y_1^2)y=y_2^2y_1-y_1^2y_2$

$x-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$.

与圆相切 $d=\dfrac{|2+y_1y_2|}{\sqrt{1+(y_1+y_2)^2}}=1$.

$(y_1y_2)^2-y_1^2-y_2^2+2y_1y_2+3=0$.

同构

同理 $(y_1y_3)^2-y_1^2-y_3^2+2y_1y_3+3=0$.

$\therefore$ 直线 A_2A_3：$(y_1^2-1)x+2y_1y+3-y_1^2=0$.

$d=\dfrac{|2y_1^2-2+3-y_1^2|}{\sqrt{(y_1^2-1)^2+4y_1^2}}=\dfrac{y_1^2+1}{\sqrt{y_1^4+2y_1^2+1}}=1$.

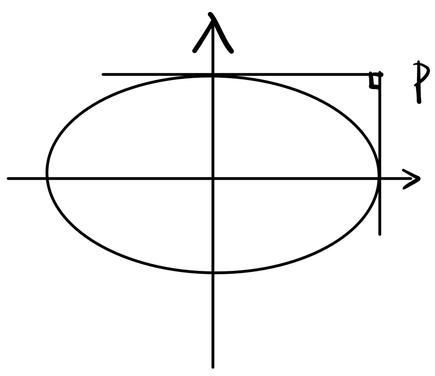


蒙日圆

7. （2013广东文）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一个焦点为 $(\sqrt{5},0)$，离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$，

~~(1) 求椭圆 C 的标准方程；~~

(2) 若动点 $P(x_0,y_0)$ 为椭圆外一点，且点 P 到椭圆 C 的两条切线相互垂直，求点 P 的轨迹方程.



1. 若切线斜率存在.

$y-y_0=k(x-x_0)$

$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ kx-y+y_0-kx_0=0\end{cases}\Rightarrow \Delta=4a^2b^2(a^2k^2+b^2-y_0^2-k^2x_0^2+2kx_0y_0)=0$

$(a^2-x_0^2)k^2+2x_0y_0k+b^2-y_0^2=0$

$k_1k_2=\frac{b^2-y_0^2}{a^2-x_0^2}=-1$

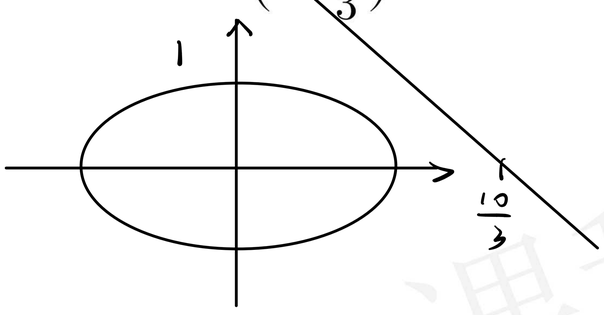
$b^2-y_0^2=x_0^2-a^2 \quad a^2+b^2=x_0^2+y_0^2$

2. 若斜率不存在. 适合上面円的方程

综上 $x^2+y^2=a^2+b^2$

8. 已知两动点 A,B 在椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 上，动点 P 在直线 $3x+4y-10=0$ 上，若 $\angle APB$ 恒为锐角，则椭圆 C 的离心率的取值范围是（　　）

A. $\left(0,\frac{2}{3}\right)$　　B. $\left(\frac{2}{3},1\right)$　　C. $\left(0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$　　D. $\left(\frac{\sqrt{6}}{3},1\right)$



临界：相切时为锐角

蒙日圆，与直线相离.

9. (多选) 法国数学家加斯帕·蒙日被称为“画法几何创始人”、“微分几何之父”. 他发现与椭圆相切的两条互相垂直的切线的交点的轨迹是以该椭圆中心为圆心的圆，这个圆称为该椭圆的蒙日圆. 若椭圆 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的蒙日圆为 $C:x^2+y^2=\frac{3}{2}a^2$，过 C 上的动点 M 作 Γ 的两条切线，分别与 C 交于 P,Q 两点，直线 PQ 交 Γ 于 A,B 两点，则 () ABD

A. 椭圆 Γ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ✓

B. $\triangle MPQ$ 面积的最大值为 $\frac{3}{2}a^2$ ✓

C. M 到 Γ 的左焦点的距离的最小值为 $(2-\sqrt{2})a$ ×

D. 若动点 D 在 Γ 上，将直线 DA,DB 的斜率分别记为 k_1,k_2，则 $k_1k_2=-\frac{1}{2}$ ✓

$\frac{3}{2}a^2=a^2+b^2$

$\Rightarrow a^2=2b^2 \quad \frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{2}$

$\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$MF_1^2=(x_0+c)^2+y_0^2=x_0^2+c^2+2cx_0+\frac{3}{2}a^2-x_0^2$

$=2cx_0+c^2+\frac{3}{2}a^2$

$MF_{1\min}=\frac{\sqrt{6}}{2}a-c$

$=\frac{\sqrt{6}}{2}a-\sqrt{a^2-\frac{1}{2}a^2}$

第三定义.

$PM^2+MQ^2=(2R)^2=4R^2=4(a^2+b^2)=4a^2+2a^2=6a^2\geq 2PM\cdot MQ$

$PM\cdot MQ\leq 3a^2$

$S_\Delta=\frac{1}{2}PM\cdot MQ\leq\frac{3}{2}a^2$

高中课程资料微信·NSJ2026





课堂总结

高中课程资料微信：NSJ2026

作业

1. 若动点 $P(x_0,y_0)$ 为抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 外一点，且过点 P 作抛物线的两条切线相互垂直，求点 P 的轨迹方程.

高中课程资料微信：NSJ2026